

Тема урока:

Застосування інтеграла.

Мета уроку.

1. Засвоїти поняття: первісна та інтеграл

2. Формувати і розвивати вміння

застосовувати інтеграл для розв'язання задач в геометрії, фізиці, робити висновки, вести евристичну бесіду, логічне та абстрактне мислення, математичне мовлення, навички організаційної роботи на уроці

3. Виховувати уважність, свідоме ставлення до навчання, вміння організовувати свою роботу на уроці, самооцінку та самоконтроль.

Самостійна робота

Варіант 1

1. Укажіть загальний вигляд первісної для функції $y = x^p$, $p \in \mathbb{R}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^p}{p} + C$	px^{p-1}	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, $p \neq -1$	$\frac{x^p}{\ln p} + C$	$x^{p+1} + C$

2. Укажіть загальний вигляд первісної для функції $y = \frac{1}{\sin^2 x}$

А	Б	В	Г	Д
$-\text{ctgx} + C$	$\text{ctgx} + C$	$-\text{ctgx}$	$\text{tgx} + C$	$-\text{tgx}$

3. Укажіть загальний вигляд первісної для функції $y = 3^x$

А	Б	В	Г	Д
$3^x + C$	$\frac{3^{x+1}}{x+1} + C$	$3^x \ln 3 + C$	$\frac{3^x}{\ln 3} + C$	$3^x \cdot x + C$

4. Для функції $y = -\frac{2}{x^2}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(\frac{1}{2}; 4)$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{x} - 4$	$\frac{4}{x^3} - 28$	$\frac{2}{x}$	$-\frac{2}{x} + 8$	$\frac{2}{3x^2} - \frac{4}{3}$

5. Обчисліть $\int_{-1}^1 2x^3 dx$. Вкажіть правильну відповідь.

А	Б	В	Г	Д
12	2	0	1	4

6. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = \sqrt[3]{x}; \quad y = 0; \quad x = 1 \quad i \quad x = 8$$

Варіант 2

1. Укажіть загальний вигляд первісної для функції $y = \cos x$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\cos^2 x}{2}$	$-\cos x + C$	$\text{tgx} + C$	$\sin x + C$	$-\sin x + C$

2. Укажіть загальний вигляд первісної для функції $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

А	Б	В	Г	Д
$-\text{ctgx} + C$	$\text{ctgx} + C$	$-\text{ctgx}$	$\text{tgx} + C$	$-\text{tgx}$

3. Укажіть загальний вигляд первісної для функції $y = 5^x$

А	Б	В	Г	Д
$5^x \cdot x + C$	$5^x \ln 5 + C$	$\frac{5^x}{\ln 5} + C$	$\frac{5^{x+1}}{x+1} + C$	$5^x + C$

4. Для функції $y = \frac{1}{x^3}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(-1; 2)$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2x^2} + 2,5$	$-\frac{1}{2x^2} + 1,5$	$-3x^{-4} + 5$	$-\frac{1}{2x^2} - \frac{7}{8}$	$-\frac{1}{2x^2} + 4$

5. Обчисліть $\int_0^1 x^2 dx$. Вкажіть правильну відповідь.

А	Б	В	Г	Д
0	2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

6. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = \sqrt{x}; \quad y = 0; \quad x = 1 \quad i \quad x = 9$$

Перевір себе!

Варіант 1

1. Укажіть загальний вигляд первісної для функції $y = x^p$, $p \in \mathbb{R}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^p}{p} + C$	px^{p-1}	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$	$\frac{x^p}{\ln p} + C$	$x^{p+1} + C$

2. Укажіть загальний вигляд первісної для функції $y = \frac{1}{\sin^2 x}$

А	Б	В	Г	Д
$-\operatorname{ctgx} + C$	$\operatorname{ctgx} + C$	$-\operatorname{ctgx}$	$\operatorname{tgx} + C$	$-\operatorname{tgx}$

3. Укажіть загальний вигляд первісної для функції $y = 3^x$

А	Б	В	Г	Д
$3^x + C$	$\frac{3^{x+1}}{x+1} + c$	$3^x \ln 3 + C$	$\frac{3^x}{\ln 3} + C$	$3^x \cdot x + C$

4. Для функції $y = -\frac{2}{x^2}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(\frac{1}{2}; 4)$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{x} - 4$	$\frac{4}{x^3} - 28$	$\frac{2}{x}$	$-\frac{2}{x} + 8$	$\frac{2}{3x^2} - \frac{4}{3}$

5. Обчисліть $\int_{-1}^1 2x^3 dx$. Вкажіть правильну відповідь.

А	Б	В	Г	Д
12	2	0	1	4

Варіант 2

1. Укажіть загальний вигляд первісної для функції $y = \cos x$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\cos^2 x}{2}$	$-\cos x + C$	$\operatorname{tgx} + C$	$\sin x + C$	$-\sin x + C$

2. Укажіть загальний вигляд первісної для функції $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

А	Б	В	Г	Д
$-\operatorname{ctgx} + C$	$\operatorname{ctgx} + C$	$-\operatorname{ctgx}$	$\operatorname{tgx} + C$	$-\operatorname{tgx}$

3. Укажіть загальний вигляд первісної для функції $y = 5^x$

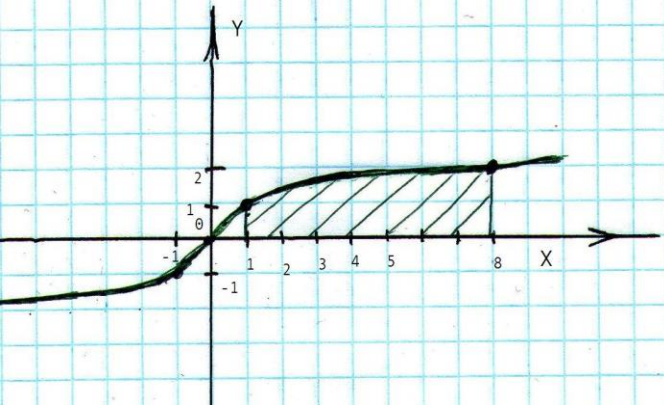
А	Б	В	Г	Д
$5^x \cdot x + C$	$5^x \ln 5 + C$	$\frac{5^x}{\ln 5} + C$	$\frac{5^{x+1}}{x+1} + c$	$5^x + C$

4. Для функції $y = \frac{1}{x^3}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(-1; 2)$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2x^2} + 2,5$	$-\frac{1}{2x^2} + 1,5$	$-3x^{-4} + 5$	$-\frac{1}{2x^2} - \frac{7}{8}$	$-\frac{1}{2x^2} + 4$

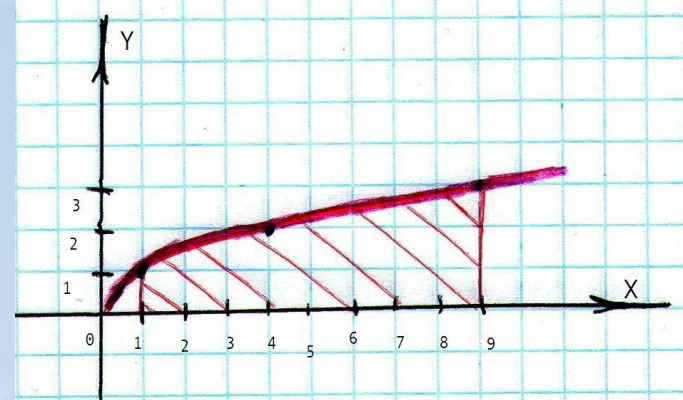
5. Обчисліть $\int_0^1 x^2 dx$. Вкажіть правильну відповідь.

А	Б	В	Г	Д
0	2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$



$$S_X = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Bigg|_1^8 = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \Bigg|_1^8 =$$

$$= \frac{3}{4} (16 - 1) = \frac{45}{4} = 11,25 \text{ кв.од.}$$



$$S_x = \int_1^9 \sqrt{x} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^9 = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Bigg|_1^9 =$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{9^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{2}{3} \cdot 26 = \frac{52}{3} \text{ кв.од.}$$

Застосування інтеграла

у фізиці

1. Обчислення шляху за відомим законом зміни швидкості.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Розв'яжемо задачу:

Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, яка змінюється за законом $v=2t+1$ (м/с). Знайти шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від $t_1=1$ с, до $t_2=3$ с.

$$s = \int_1^3 (2t + 1) dt = \left(2 \cdot \frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_1^3 = \\ = (9 + 3 - (1 + 1)) = 10(\text{м}).$$

2. Обчислення роботи змінної сили.

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

Розв'яжемо задачу:

Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з ями глибиною 4м, що має квадратний переріз із стороною 2м. Густина води $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

$$A = \int_0^4 4 \rho g (4 - x) dx = 4 \rho g (4x - \frac{x^2}{2}) \Big|_0^4$$

$$x \in [0; 4], \quad g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$$
$$4 \rho g (4x - \frac{x^2}{2}) \Big|_0^4 = 4 \rho g (16 - 8) =$$

$$= 32 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \approx 313,6 \cdot 10^3 \text{ (Дж)} \approx 3,1 \cdot 10^5 \text{ (Дж)}.$$

3. Обчислення маси неоднорідного стержня.

якщо $\rho(l)$ – густина стержня,

то
$$m = \int_{l_1}^{l_2} \rho(l) dl$$

Розв'яжемо задачу:

Знайти масу стержня завдовжки 35см, якщо його лінійна густина змінюється за законом $\rho(l) = (4l + 3)$ (кг/м)

$$m = \int_0^{0,35} (4l + 3) dl = (2l^2 + 3l) \Big|_0^{0,35} =$$
$$= 1,295 \approx 1,3 (\text{кг})$$

4. Обчислення кількості електрики.

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt.$$

Розв'яжемо задачу:

Знайти кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за 10с, якщо сила струму змінюється за законом $I(t)=(4t+1)(A)$

$$q = \int_0^{10} (4t + 1) dt = (2t^2 + t) \Big|_0^{10} = 210 (Кл)$$

№ п/п	Величини	Знаходження похідної	Знаходження інтеграла
1	s — переміщення v — швидкість	$v(t) = s'(t)$	$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
2	A — робота F — сила	$F(x) = A'(x)$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$
3	A — робота N — потужність	$N = A'(t)$	$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt$
4	m — маса тонкого стержня ρ — лінійна густина	$\rho(x) = m'(x)$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$
5	q — електричний заряд I — сила струму	$I(t) = q'(t)$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$
6	Q — кількість теплоти C — теплоємність	$c(t) = Q'(t)$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$
7	v — швидкість руху a — прискорення	$a(t) = v'(t)$	$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$

Д

О

М

А

Ш

Н

Е

З

А

В

Д

А

Н

Н

Я

1. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)=1-3t$ (м/с). Обчислити шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від $t_1=2$ с, до $t_2=5$ с.
2. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб викачати воду з циліндричної цистерни, радіус якої 2м, а висота 5м.
3. Знайти масу неоднорідного стержня завдовжки 4см, якщо його густина змінюється за законом: $\rho(l)=2l^2+1$ (кг/м)
4. Знайти кількість електрики, яка проходить через поперечний переріз провідника за 20с, якщо сила струму змінюється за законом: $I(t)=2t+1$ (А)



ДО НОВИХ

ЗУСТРІЧЕЙ!